BAKI UNİVERSİTETİNİN ELMİ XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.Т.АЛИЕВА

Институт Математики и Механики НАНА

В этой статье на полуоси получены условия разрешимости одного класса краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений четвёртого порядка с разрывными коэффициентами. Эти условия выражены коэффициентами данного операторно-дифференциального уравнения.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H краевую задачу

$$P(d/dt)u \equiv \frac{d^4u(t)}{dt^4} + \rho(t)A^4u(t) + \sum_{j=0}^{4} A_{4-j}(t)u^{(j)}(t) = f(t), t \in R_+, \qquad (1)$$

$$u(0) = u''(0) = 0, \qquad (2)$$

где $R_+ = (0, \infty)$, $f(t)$ и $u(t)$ - вектор- функции, определенные в R_+ почти всюду, со значениями из H,

$$\rho(t) = \begin{cases} \alpha^4, & t \in (0,1), \\ \beta^4, & t \in (1,\infty), \end{cases}$$

причем $\alpha > 0$, $\beta > 0$ - постоянные числа, a операторы A и $A_j(t)$ $\left(j = \overline{0,4}\right)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) A - нормальный обратимый оператор, спектр которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |arg\,\lambda| \le \varepsilon\}, \quad 0 \le \varepsilon < \pi/4;$$

2) линейные операторы $B_j(t) = A_j(t)A^{-j}$ $\left(j = \overline{0,4}\right)$ ограничены в H и $B_j(t) \in L_\infty(R_+; L(H))$.

Здесь и в дальнейшем, производные понимаются в смысле теории обобщенных функций [1].

Если оператор A удовлетворяет условию 1), то его можно представить в виде

$$A = UC = CU,$$

где U - унитарный, а C - положительно- определенный самосопряженный оператор в H. Обозначим $H_\gamma = D(C^\gamma)$, $\gamma \ge 0$, и определим норму $\|x\|_\gamma = \|C^\gamma x\|$, $x \in H_\gamma$. Очевидно, что H_γ - гильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y)_\gamma = (C^\gamma x, C^\gamma y)$.

Следуя книге [1], обозначим через $L_2(R_+; H)$ гильбертово пространство вектор- функций, определенные в R_+ почти всюду, со значениями из H, для которых

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Далее, определим следующие гильбертовые пространства [1]:

$$W_2^4(R_+; H) = \left\{ u : u^{(4)} \in L_2(R_+; H), \quad A^4 u \in L_2(R_+; H) \right\}$$

и

$$\overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+; H) = \left\{ u : u \in W_2^4(R_+; H),\ u(0) = u''(0) = 0 \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^4} = \left(\left\|u^{(4)}\right\|_{L_2}^2 + \left\|A^4 u\right\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}.$$

Отметим, что при $R = (-\infty, \infty)$ пространства $L_2(R; H)$ и $W_2^4(R; H)$ определяются аналогично.

Определение 1. *Если вектор-функция* $u(t) \in W_2^4(R_+; H)$ *удовлетворяет уравнению (1) почти всюду, в* $(0, \infty)$ *то ее будем называть регулярным решением уравнения (1).*

Определение 2. *Если при любом* $f(t) \in L_2(R; H)$ *существует регулярное решение* $u(t)$ *уравнения (1), которое удовлетворяет граничным условиям (2) в смысле*

$$\lim_{t \to +0} \|u(t)\|_{7/2} = 0, \quad \lim_{t \to +0} \|u''(t)\|_{3/2} = 0$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^4} \le const \|f\|_{L_2},$$

то граничную задачу (1), (2) будем называть регулярно разрешимым.

В данной работе мы найдем условия регулярной разрешимости задачи (1), (2). Эти условия выражены коэффициентами операторно- дифференциального уравнения.

Отметим, что при $\rho(t) \equiv 1 \quad (\alpha = \beta = 1)$ аналогичная задача рассмотрена в [2]. Когда $\alpha \neq \beta$, в общем случае, при A - самосопряженный положительный оператор, данная задача исследована в [3].

Напишем задачу (1), (2) в виде операторного уравнения

$$Pu \equiv P_0 u + P_1 u = f,$$

где $f \in L_2(R_+; H)$, $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+; H)$, причем

$$P_0 u = u^{(4)} + \rho(t) A^4 u, \quad P_1 u = \sum_{j=0}^{4} A_{4-j}(t) u^{(j)}(t), \qquad u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+; H).$$

Сперва займемся решением уравнения $P_0 u = f$. Имеет место

Теорема 1. *При выполнении условия 1) оператор* P_0 *отображает пространство* $\overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+; H)$ *на пространство* $L_2(R_+; H)$ *изоморфно.*

Доказательство. Как в работе [4], легко показать, что вектор-функции

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda^4 E + \alpha^4 A^4\right)^{-1} \left(\int_0^{\infty} f(s) e^{-\lambda(t-s)} ds \right) d\lambda$$

и

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda^4 E + \beta^4 A^4\right)^{-1} \left(\int_0^{\infty} f(s) e^{-\lambda(t-s)} ds \right) d\lambda$$

принадлежат пространству $W_2^4(R; H)$ и удовлетворяют уравнениям $u^{(4)} + \alpha^4 A^4 u = f$ и $u^{(4)} + \beta^4 A^4 u = f$, соответственно, почти всюду в R_+. Обозначим сужение $u_1(t)$ на $[0,1]$ через $\psi_1(t)$, а сужение $u_2(t)$ на $[1,\infty]$ через $\psi_2(t)$. Из теоремы о следах вытекает, что $\psi_1(0)$, $\psi_2(1) \in H_{7/2}$, а $\psi_1''(0)$, $\psi_2''(1) \in H_{3/2}$ (см [1]). Обозначим

$$u(t) = \begin{cases} \xi_1(t) \equiv \psi_1(t) + e^{\alpha\omega_1 tA}\varphi_1 + e^{\alpha\omega_2 tA}\varphi_2 + e^{\alpha\omega_1(1-t)A}\varphi_3 + e^{\alpha\omega_2(1-t)A}\varphi_4, \ t \in (0,1), \\ \\ \xi_2(t) \equiv \psi_2(t) + e^{\beta\omega_1(t-1)A}\varphi_5 + e^{\beta\omega_2(t-1)A}\varphi_6, \ t \in (1,\infty), \end{cases}$$

где $\omega_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \omega_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),$ а неизвестные векторы $\varphi_j \ (j = \overline{1,6})$ принадлежат пространству $H_{1/2}$. Из условия

$u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$ вытекает, что $\xi_1(0)=0,\ \xi_1''(0)=0, \xi_1^{(j)}(1)=\xi_2^{(j)}(1),\ j=\overline{0,3}$. Из этих условий легко определяются векторы $\varphi_j \in H_{7/2}\quad (j=\overline{1,6})$. Так как уравнение $P_0 u = 0$ имеет только нулевое решение из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$ и $\|P_0 u\|_{L_2} \le const\,\|u\|_{W_2^4}$, то утверждение теоремы вытекает из теоремы Банаха об обратном операторе. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что нормы $\|u\|_{W_2^4}$ и $\|P_0 u\|_{L_2}$ эквивалентны в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$. Следовательно, из теоремы о промежуточных производных получается, что конечны числа

$$\overset{\circ}{N}_j(R_+) = \sup_{0\ne u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)} \left\|A^{4-j}u^{(j)}\right\|_{L_2} \cdot \|P_0 u\|_{L_2}^{-1},\ j=\overline{0,4}. \tag{3}$$

Для оценок этих чисел докажем следующую лемму.

Лемма 1. *При выполнении условия 1) для любого* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$ *имеет место неравенство*

$$\|P_0 u\|_{L_2}^2 \ge min(\alpha^4;\beta^4)\left(\left\|\rho^{-1/2}u^{(4)}\right\|_{L_2}^2 + \left\|\rho^{1/2}A^4 u\right\|_{L_2}^2 + 2cos4\varepsilon\left\|A^2 u''\right\|_{L_2}^2\right). \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left\|\rho^{-1/2}P_0 u\right\|_{L_2}^2 = \left\|\rho^{-1/2}u^{(4)} + \rho^{1/2}A^4 u\right\|_{L_2}^2 =$$

$$= \left\|\rho^{-1/2}u^{(4)}\right\|_{L_2}^2 + \left\|\rho^{1/2}A^4 u\right\|_{L_2}^2 + 2\,Re\left(u^{(4)}, A^4 u\right)_{L_2}. \tag{5}$$

Учитывая, что при $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$ $u(0)=u''(0)=0$, интегрируя по частям, получаем:

$$\left(u^{(4)}, A^4 u\right)_{L_2} = \int_0^\infty \left(u^{(4)}, A^4 u\right)dt = \int_0^\infty \left(A^{*2}u'', A^2 u''\right)dt = \left(A^{*2}u'', A^2 u''\right)_{L_2}.$$

Следовательно, из условия 1) получаем:

$$2Re\left(u^{(4)}, A^4 u\right)_{L_2} = 2Re\left(A^{*2}u'', A^2 u''\right)_{L_2} \ge 2cos4\varepsilon\left(A^2 u'', A^2 u''\right)_{L_2} = 2cos4\varepsilon\left\|A^2 u''\right\|_{L_2}^2. \tag{6}$$

Учитывая неравенство (6) в равенстве (5), получаем:

$$\left\|\rho^{-1/2}u^{(4)}\right\|_{L_2}^2 + \left\|\rho^{1/2}A^4 u\right\|_{L_2}^2 + 2\cos 4\varepsilon\left\|A^2 u''\right\|_{L_2} \le$$

$$\le \left\|\rho^{-1/2}P_0 u\right\|_{L_2}^2 \le \max_t \rho^{-1}(t)\|P_0 u\|_{L_2}^2 = \frac{1}{min\left(\alpha^4;\beta^4\right)}\|P_0 u\|_{L_2}^2.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Теперь оценим числа $\overset{\circ}{N}_j(R_+)$. Имеет место

Лемма 2. Числа $\overset{\circ}{N}_j(R_+)$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\overset{\circ}{N}_j(R_+) \le C_j(\alpha;\beta;\varepsilon), \quad j=\overline{0,4}, \tag{7}$$

где

$$C_0(\alpha;\beta;\varepsilon)=\frac{1}{min(\alpha^4;\beta^4)}\begin{cases}1, & 0\le\varepsilon\le\pi/8,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos 2\varepsilon}, & \pi/8\le\varepsilon<\pi/4.\end{cases}$$

$$C_1(\alpha;\beta;\varepsilon)=\frac{1}{min(\alpha^3;\beta^3)}\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\cos 2\varepsilon}}, & 0\le\varepsilon<\pi/8,\\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{8}\cos 2\varepsilon}, & \pi/8\le\varepsilon<\pi/4,\end{cases}$$

$$C_2(\alpha;\beta;\varepsilon)=\frac{1}{min(\alpha^2;\beta^2)}\cdot\frac{1}{2\cos 2\varepsilon}, \quad 0\le\varepsilon<\pi/4,$$

$$C_3(\alpha;\beta;\varepsilon)=\frac{max(\alpha;\beta)}{min(\alpha^2;\beta^2)}\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\cos 2\varepsilon}}, & 0\le\varepsilon\le\pi/8,\\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{8}\cos 2\varepsilon}, & \pi/8\le\varepsilon<\pi/4,\end{cases}$$

$$C_4(\alpha;\beta;\varepsilon)=\frac{max(\alpha^2;\beta^2)}{min(\alpha^2;\beta^2)}\begin{cases}1, & 0\le\varepsilon\le\pi/8,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos 2\varepsilon}, & \pi/8\le\varepsilon<\pi/4.\end{cases}$$

Доказательство. При $u\in\overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$ $u(0)=u''(0)=0$. Поэтому, интегрируя по частям, имеем:

$$\|A^2u''\|_{L_2}^2=\|C^2u''\|_{L_2}^2=\int_0^\infty(C^2u'',C^2u'')dt=\int_0^\infty(C^4u,u^{(4)})dt=$$

$$=\left(\rho^{1/2}C^4u,\rho^{-1/2}u^{(4)}\right)_{L_2}\le\frac{1}{2}\left(\|\rho^{1/2}C^4u\|_{L_2}^2+\|\rho^{-1/2}u^{(4)}\|_{L_2}^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\|\rho^{1/2}A^4u\|_{L_2}^2+\|\rho^{-1/2}u^{(4)}\|_{L_2}^2\right). \tag{8}$$

Учитывая неравенство (5) в неравенстве (8), получаем:

$$\|A^2u''\|_{L_2}^2\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{min(\alpha^4;\beta^4)}\|P_0u\|_{L_2}^2-2\cos 4\varepsilon\|A^2u''\|_{L_2}^2\right),$$

т.е.

$$\left\| A^2 u'' \right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{4\cos^2 2\varepsilon} \frac{1}{\min\left(\alpha^4; \beta^4\right)} \left\| P_0 u \right\|_{L_2}^2 .$$

Следовательно, неравенство (7) при $j = 2$ доказано.

Неравенство (7) при $j = 0$ и $j = 4$ непосредственно следует из леммы 1 (неравенство 4) (см. доказательство леммы 2 в случае $j = 0$ и $j = 4$ в работе [4]). Далее, при $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4\left(R_+; H\right)$ $\left(u(0) = u''(0) = 0\right)$

$$\left\| A^3 u' \right\|_{L_2}^2 = \left\| C^3 u' \right\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty \left(C^3 u', C^3 u'\right) dt = \int_0^\infty \left(C^4 u, C^2 u''\right) dt \le$$

$$\le \left\| C^4 u \right\|_{L_2} \left\| C^2 u'' \right\|_{L_2} \le \left\| A^4 u \right\|_{L_2} \left\| A^2 u'' \right\|_{L_2} = C_0\left(\alpha; \beta; \varepsilon\right) C_2\left(\alpha; \beta; \varepsilon\right) \left\| P_0 u \right\|_{L_2}^2 =$$

$$= C_1^2\left(\alpha; \beta; \varepsilon\right) \left\| P_0 u \right\|_{L_2}^2 ,$$

т.е. неравенство (7) при $j = 1$ также доказано. При $j = 3$ имеем:

$$\left\| A u''' \right\|_{L_2}^2 = \left\| C u''' \right\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty \left(C u''', C u'''\right) dt = \int_0^\infty \left(C^2 u'', u^{(4)}\right) dt \le$$

$$\le \left\| C^2 u'' \right\|_{L_2} \left\| u^{(4)} \right\|_{L_2} = \left\| A^2 u'' \right\|_{L_2} \left\| u^{(4)} \right\|_{L_2} \le C_2\left(\alpha; \beta; \varepsilon\right) \cdot$$

$$\cdot C_2\left(\alpha; \beta; \varepsilon\right) \left\| P_0 u \right\|_{L_2}^2 = C_3^2\left(\alpha; \beta; \varepsilon\right) \left\| P_0 u \right\|^2 .$$

Лемма доказана.

Теперь докажем теорему о регулярной разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1), 2) и неравенство*

$$\theta\left(\alpha; \beta; \varepsilon\right) = \sum_{j=0}^4 C_j\left(\alpha; \beta; \varepsilon\right) \left\| B_{4-j}(t) \right\|_{L_\infty\left(R_+; L(H)\right)} < 1 .$$

Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что оператор

$$P_0^{-1} : L_2\left(R_+; H\right) \to \overset{\circ}{W}{}_2^4\left(R_+; H\right)$$

ограничен. После замены $\upsilon = P_0 u$ уравнение $Pu = f$ имеет вид:

$$\upsilon + P_1 P_0^{-1} \upsilon = f ,$$

где $\upsilon, f \in L_2\left(R_+; H\right)$. Для любого $\upsilon \in L_2\left(R_+; H\right)$ имеет место неравенство:

$$\left\| P_1 P_0^{-1} \upsilon \right\|_{L_2} = \left\| P_1 u \right\|_{L_2} \le \sum_{j=0}^4 \left\| B_{4-j}(t) \right\|_{L_\infty\left(R_+; L(H)\right)} \left\| A^{4-j} u^{(j)} \right\|_{L_2} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=0}^4 C_j\left(\alpha; \beta; \varepsilon\right) \left\| B_{4-j}(t) \right\|_{L_\infty\left(R_+; L(H)\right)} \right) \left\| P_0 u \right\| = \theta\left(\alpha; \beta; \varepsilon\right) \left\| \upsilon \right\|_{L_2} .$$

Так как $\theta\left(\alpha; \beta; \varepsilon\right) < 1$, то оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ обратим в $L_2\left(R_+; H\right)$ и мы можем найти u :

$$u = P_0^{-1}\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1} f .$$

Отсюда легко получается неравенство

$$\|u\|_{W_2^4} \le const\|f\|_{L_2} .$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., “Мир”, 1971, 371 с.
2. Мирзоев С.С. Кратная полнота части корневых векторов полиномиальных операторных пучков четвертого порядка с нормальной главной частью. “Спектральная теория операторов”, Баку, “Элм”, 1982, с. 148-161.
3. Алиев А.Р. О корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений четкого порядка с переменными коэффициентами, Математика, Экономика, Экология, Образование, т.7, вып.1, 2000, с.9-15.
4. Mirzoev S.S., Alieva A.T. Solvability of one class of boundary value problem for a fourth order operator- differential equation. Proceedings of Inst. Mathematics and Mechanics, vol. XXII, 2005, p.85-93.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB KƏSİLƏN ƏMSALLI OPERATOR- DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİ ÜÇÜN BİR SİNİF SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLOLUNMA ŞƏRTLƏRİ HAQQINDA

A.T.ƏLİYEVA

ANNOTASİYA

Bu məqalədə yarımoxda dördüncü tərtibli kəsilən əmsallı operator- diferensial tənlikləri üçün bir sinif sərhəd məsələsinin həllolunma şərtləri alınmışdır. Bu şərtlər verilən operator- diferensial tənliyin əmsalları ilə ifadə olunmuşdur.

ON THE SOLVABILITY OF ONE CLASS BOUNDARY- VALUE PROBLEM FOR THE OPERATOR – DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

A.T.ALIEVA

ABSTRACT

Solvability conditions for one class boundary – value problem for the operator – differential equations of the fourth order with discontinuous coefficients on semi – axis are obtained in this paper. These conditions are expressed only in terms of the coefficients of given operator – differential equation.